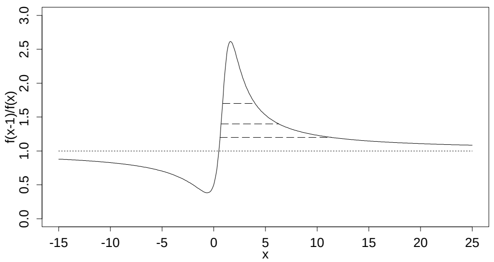
Prof. H.R. Künsch   Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik   Abt. IX, SS99

Musterlösung zur Übung 11

1. Der Neyman-Pearson-Test der Hypothese $H_0 : X \sim f(x)\,dx$ gegen die Alternative $H_A : X \sim f(x-1)\,dx$ verwirft, falls

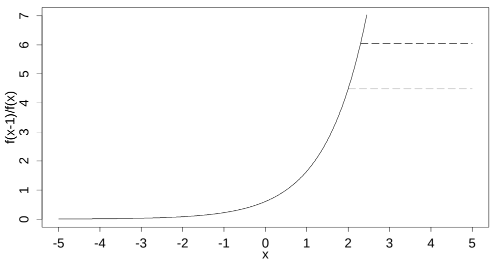
$$\frac{f(x-1)}{f(x)} > c = c(\alpha)\,.$$

Im Fall der Cauchyverteilung $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ gilt $\frac{f(x-1)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-2x+2}$. Von Interesse sind



insbesondere Werte $c > 1$. (Bei $c = 1$ hätte der Verwerfungsbereich die Form $]\frac{1}{2}, \infty[$, was ein Niveau von knapp 65% bedeuten würde. Bei kleineren c's würde noch häufiger verworfen.) Die Verwerfungsbereich K_α ist also für alle sinnvollen α ein beschränktes Intervall.

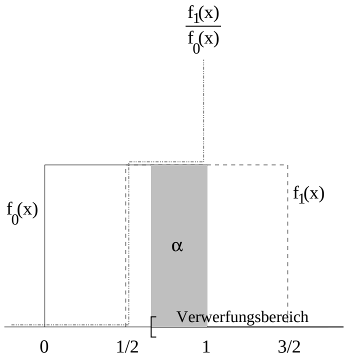
Im Fall der Normalverteilung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ gilt $\frac{f(x-1)}{f(x)} = e^{x-\frac{1}{2}}$. Hier sind die Ver-



werfungsgbereiche nach oben unbeschränkt.

Bei der Cauchyverteilung sind sehr grosse Werte sowohl unter H_0 als auch unter H_A nicht allzu unwahrscheinlich. Deswegen kann man H_0 bei grosser Beobachtung X nicht verwerfen. Bei der Normalverteilung tritt dieses (unerwartete) Phänomen nicht auf, da grosse X unter der Alternativhypothese bei weitem wahrscheinlicher sind als unter H_0. (Absolut sind natürlich beide Wahrscheinlichkeiten sehr klein.)

2. Betrachte folgende Figur:



a) Für $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ wähle $K' \subseteq (\frac{1}{2}, 1)$ mit $\mu_L(K') = \alpha$ (ist die Situation in der Figur) und als Verwerfungsbereich $K = K' \cup [1, \infty)$. Dieser Test ist offensichtlich ein mächtigster Test zum Niveau α, und es gilt $\varphi = 1$, falls $f_1(x) > f_0(x)$, und $\varphi = 0$, falls $f_1(x) < f_0(x)$ (also $c = 1$).
Für $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ wähle $K' \subseteq (0, \frac{1}{2})$ mit $\mu_L(K') = \alpha - \frac{1}{2}$ und den Verwerfungsbereich $K = K' \cup (\frac{1}{2}, \infty)$. Auch dieser Test ist mächtigst zum Niveau α, und er erfüllt die Bedingungen vom Skript mit $c = 0$.
Solche Tests sind nicht eindeutig, da K' eine beliebige Teilmenge von $(\frac{1}{2}, 1)$ bzw. von $(0, \frac{1}{2})$ sein kann.

b) Für $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ (zum Beispiel für $\alpha = \frac{3}{4}$) wähle $K = (\frac{1}{2}, \infty)$. Dieser Test verwirft immer, wenn die Alternative wahr ist. Er hat also maximale Macht $\mathbf{E}_1[\varphi] = 1$, obwohl er das zur Verfügung stehende Niveau nicht einmal ganz ausnützt: $\mathbf{E}_0[\varphi] = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

3. **a)** i) **Vorzeichen-Test**

a) Modell: $X_i = i$-te Messung vom CO-Gehalt, $i = 1, \ldots, n = 10$.
$(X_i)_{1 \le i \le 10}$ i.i.d. (unabhängig, identisch verteilt) mit Verteilung $X_i \sim F$ und Median m, $P[X_i = m] = 0$ (ignoriere die Messungen $X_i = m$).

b) Nullhypothese H_0: $m = m_0 = 20$ oder in Worten: Gerät misst richtig

c) Alternativhypothese H_A: $m \neq m_0$: Gerät misst falsch

d) Test-Statistik $T := \#\{i | X_i > m_0\}$ = Anzahl Messungen X_i grösser als m_0

e) Unter H_0 ist $T \sim \text{Bin}(10, 1/2)$ und also $P[T \leq 1] = P[T \geq 9] = 0.011$, aber $P[T \leq 2] = P[T \geq 8] = 0.055$. Deshalb ist

f) der Verwerfungsbereich auf dem 5%-Niveau: $K = \{x | \varphi(x) = 1\} = \{0, 1, 9, 10\}$

g) Für unsere Messungen ist $T = 1$. Die Nullhypothese wird verworfen.

ii) t-**Test**

a) Modell: $(X_i)_{1 \leq i \leq 10}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu = E[X_i]$ unbekannt, $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ ebenfalls unbekannt

b) H_0: $\mu = \mu_0 = 20$

c) H_A: $\mu \neq \mu_0$

d) Teststatistik: $T := \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{x}}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$

e) Unter H_0 gilt: $T \sim t_{n-1}$. Wir erwarten in diesem Fall also ein T in der Nähe von 0.

f) H_0 wird auf dem 5%-Niveau verworfen, falls $|T| > t_{n-1, 0.975}$. Die kritischen Werte $t_{n-1, 0.975}$ sind tabelliert. Für $n = 10$ haben wir $t_{9, 0.975} = 2.26$.

g) Mit unseren Daten beträgt die Teststatistik T :

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}} = \frac{20.44 - 20}{\frac{0.813}{\sqrt{10}}} = 1.712 < t_{9, 0.975} = 2.26$$

Das Gerät kann richtig geeicht sein. Wir behalten die Nullhypothese bei.

iii) z-**Test**

a) Modell: $(X_i)_{1 \leq i \leq 10}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ unbekannt, σ^2 bekannt (im Gegensatz zu Fall ii).

b) H_0: $\mu = \mu_0 = 20$

c) H_A: $\mu \neq \mu_0$

d) Teststatistik: $Z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

e) Unter H_0 gilt: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wir erwarten in diesem Fall also ein Z in der Nähe von 0.

f) H_0 wird auf dem 5%-Niveau verworfen, falls $|Z| > 1.96$

g) Mit unseren Daten beträgt die Teststatistik Z :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{20.44 - 20}{\frac{0.8}{\sqrt{10}}} = 1.739 < 1.96$$

Das Gerät kann richtig geeicht sein. Wir behalten die Nullhypothese bei.

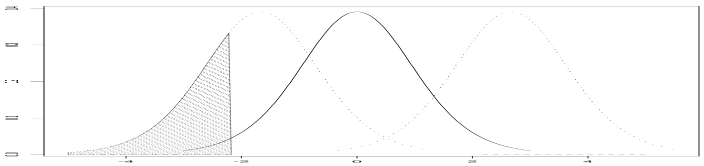
b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit β, dass der Test die Nullhypothese H_0 akzeptiert, obwohl eigentlich die Alternativhypothese H_A: $\mu_A = 20.1$ (20.8) richtig wäre.

$$\begin{aligned}
\beta &= P_{H_A}[Z \in \text{Annahmebereich}] \\
&= P_{H_A}\Big[-1.96 \leq \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq 1.96\Big] \\
&= P_{H_A}\Big[-1.96 + \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X} - \mu_A}{\sigma / \sqrt{n}} \leq 1.96 + \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma / \sqrt{n}}\Big]
\end{aligned}$$

$$= P_{H_A}\Big[-2.355 \leq \underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_A}{\sigma / \sqrt{n}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq 1.565\Big] = 0.932$$

$$(\text{bzw.} \quad = P_{H_A}\Big[-5.122 \leq \underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_A}{\sigma / \sqrt{n}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq -1.202\Big] = 0.115)$$

4. a) und **b)** In der untenstehenden Skizze sind zum einen eine mögliche Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese (der ausgezogene Kamelbuckel) und zum anderen die Macht unter der Alternative 1 (schraffierte Fläche) eingezeichnet. Die Macht unter H_{A_1} ist also etwa 30%. Unter H_{A_2} beträgt die Macht etwa 80%.



c) Der Annahmebereich wird grösser und die Macht damit kleiner.