Musterlösung zur Übung 7

1. a) Es gelten $\phi_X(0) = \mathbf{E}[e^0] = 1$ und $|\phi_X(t)| = |\mathbf{E}[e^{itX}]| \le \mathbf{E}[|e^{itX}|] = \mathbf{E}[1] = 1$. Für die Stetigkeit von $\phi_X(t)$ ist zu zeigen, dass für eine Folge $t_n \to t$ $(n \to \infty)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \phi_X(t_n) = \phi_X(t)$ oder – äquivalent dazu – $\lim_{n\to\infty} \int e^{it_n x}\, d\mu(x) = \int e^{itx}\, d\mu(x)$. Das ist aber genau die Aussage des Satzes der dominierten Konvergenz einer Funktionenfolge f_n von Lebesgue mit $f_n(t) = e^{it_n x}$. Es reicht also, die Voraussetzungen für den Konvergenzsatz von Lebesgue nachzuprüfen: $|f_n(t)| = |e^{it_n x}| \le 1 (=: g(t))$ mit $\int g\, d\mu = \int 1\, d\mu = 1 < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} e^{it_n x} = e^{itx}$, da e^{itx} stetig in t. Schliesslich gilt noch $\phi_{aX+b}(t) = \mathbf{E}[e^{it(aX+b)}] = \mathbf{E}[e^{itaX}]\mathbf{E}[e^{itb}] = e^{itb}\phi_X(at)$.

b) Sei zuerst $k = 1$. Es gilt die Abschätzung

$$\left|\frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h}\right| = \left|e^{itx}\frac{e^{ihx} - 1}{h}\right| = \frac{1}{|h|}\,|e^{ihx} - 1| \le \frac{1}{|h|}\,|hx| = |x| =: g(x)\,,$$

und g ist wegen $\mathbf{E}[|X|^k] < \infty$ insbesondere für $k = 1$ integrierbar. Also folgt mit der Linearität des Erwartungswertes und wiederum dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\phi_X(t+h) - \phi_X(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{E}[e^{i(t+h)X}] - \mathbf{E}[e^{itX}]}{h} = \lim_{h\to 0}\mathbf{E}\Big[\frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h}\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\lim_{h\to 0}\frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h}\Big] = \mathbf{E}\Big[\frac{d}{dt}e^{itX}\Big] \\
&= \mathbf{E}[iX\, e^{itX}] = i^1\, \mathbf{E}[X^1 e^{itX}]\,.
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt von k nach $k+1$ verläuft völlig analog: Angenommen, $\phi_X(t)$ sei k-mal differenzierbar mit $\phi_X^{(k)}(t) = i^k\, \mathbf{E}[X^k e^{itX}]$, dann ist

$$\left|\frac{i^k x^k e^{i(t+h)x} - i^k x^k e^{itx}}{h}\right| \le |x|^{k+1}\,,$$

$\mathbf{E}[|X|^{k+1}] < \infty$ und

$$\begin{aligned}
\phi_X^{(k+1)}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi_X^{(k)}(t+h) - \phi_X^{(k)}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\mathbf{E}\Big[\frac{i^k X^k e^{i(t+h)X} - i^k X^k e^{itX}}{h}\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\frac{d}{dt} i^k X^k e^{itX}\Big] = \mathbf{E}[i^k X^k\, iX\, e^{itX}] = i^{k+1}\, \mathbf{E}[X^{k+1} e^{itX}]\,.
\end{aligned}$$

c) Aus der Unabhängigkeit von X und Y ergibt sich unmittelbar

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbf{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbf{E}[e^{itX}\, e^{itY}] = \mathbf{E}[e^{itX}]\, \mathbf{E}[e^{itY}] = \phi_X(t)\, \phi_Y(t)\,.$$

Bemerkung: Die Standardnormalverteilung mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ besitzt die charakteristische Funktion $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$, und für die sogenannte Cauchyverteilung mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ gilt $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ (siehe auch Aufgabe 2).

2. a) Entweder verwendet man direkt die Formel (2.12) mit $f_X(x) = \frac{1}{\pi}$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$, $g(x) = \tan x$, $g'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und erhält für $-\infty < y < \infty$

$$f_Y(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))}\,\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}\,,$$

oder man rechnet via die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= F_Y'(y) = \frac{d}{dy}P[Y \le y] = \frac{d}{dy}P[\tan X \le y] = \frac{d}{dy}P[X \le \arctan(y)] \\
&= \frac{d}{dy}\,\frac{\arctan y - (-\frac{\pi}{2})}{\pi} = \frac{d}{dy}\,\frac{\arctan y}{\pi} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}
\end{aligned}$$

und erspart sich damit die Ableitung der Umkehrfunktion.
Der Erwartungswert der Cauchyverteilung existiert nicht, denn

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\pi(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dy}\log(1+y^2)\,dy = \frac{1}{2\pi}\log(1+y^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \infty - \infty\,.
\end{aligned}$$

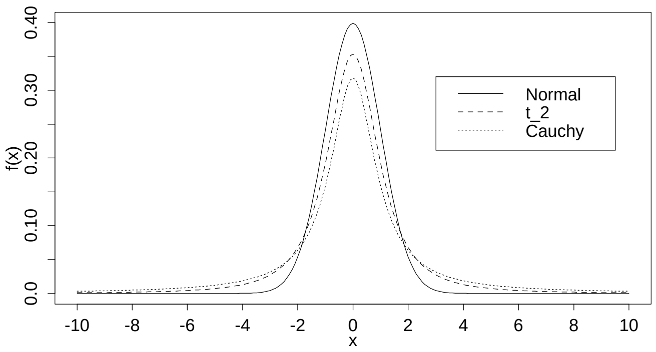
b) $\phi_Y(t) = e^{-|t|}$ ist in 0 nicht differenzierbar. Die Kontraposition der Aussage der Aufgabe 1.b) besagt, dass dann $\mathbf{E}[|Y|] = \infty$ sein muss. Da die Verteilung von Y symmetrisch (um Null) ist, also Y und $-Y$ und damit $Y^+ = \max(Y, 0)$ und $Y^- = \max(-Y, 0)$ gleiche Verteilung haben, müssen wegen $\mathbf{E}[|Y|] = \mathbf{E}[Y^+ + Y^-] = 2\,\mathbf{E}[Y^+]$ sowohl $\mathbf{E}[Y^+] = \infty$ als auch $\mathbf{E}[Y^-] = \infty$ sein. Also folgt auch ohne Rechnung aus der Tatsache, dass die charakteristische Funktion nicht differenzierbar ist, dass der Erwartungswert der Cauchyverteilung nicht existieren kann.

c) Mit Hilfe der Aufgaben 1.a) und 1.c) rechnet man

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)}(t) &= \phi_{Y_1+Y_2}\Big(\frac{1}{2}t\Big) = \phi_{Y_1}\Big(\frac{1}{2}t\Big)\,\phi_{Y_2}\Big(\frac{1}{2}t\Big) \\
&= e^{-|\frac{1}{2}t|}\, e^{-|\frac{1}{2}t|} = e^{-(\frac{1}{2}|t| + \frac{1}{2}|t|)} = e^{-|t|}\,.
\end{aligned}$$

Das ist die mittlerweile bestens bekannte charakteristische Funktion einer Cauchyverteilung. Aus dem Umkehrsatz folgt also, dass das Mittel zweier cauchyverteilter Zufallsvariablen wiederum eine Cauchyverteilung besitzt. Wären Klausurnoten cauchyverteilt, dann hätten wir nicht für jede Zeugnisnote drei oder vier Prüfungen schreiben müssen; eine einzige wäre ebenso genau gewesen!

Die Abbildung zeigt zum Vergleich die Dichten der Standardnormalverteilung, der t_2-Verteilung (siehe Kapitel 4) und der Cauchyverteilung.



3. **a)** Mit quadratischem Ergänzen findet man die Randdichte

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = c\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(x^2+y^2-2\varrho xy)}\,dy \\
&= c\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}[(y-\varrho x)^2-(\varrho x)^2+x^2]}\,dy = c\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-\varrho x)^2}{2(1-\varrho^2)}-\frac{x^2(1-\varrho^2)}{2(1-\varrho^2)}}\,dy \\
&= c\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\varrho^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\varrho^2}}\,e^{-\frac{(y-\varrho x)^2}{2(1-\varrho^2)}}\,dy \\
&= c\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\varrho^2}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,,
\end{aligned}$$

da unter dem letzten Integral die Dichte einer Normalverteilung mit Erwartungswert ϱx und Varianz $1-\varrho^2$ steht.
Offensichtlich ist die Randverteilung von X eine Standardnormalverteilung. Daher muss $c\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\varrho^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sein. Das liefert

$$c = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}}\,.$$

b) Die Randdichten von X und natürlich ebenso von Y sind also Normaverteilungen mit $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ und $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = 1$. Darum gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Corr}(X,Y) &= \mathbf{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} c\,xy\,e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(x^2+y^2-2\varrho xy)}\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\varrho^2}}\,y\,e^{-\frac{(y-\varrho x)^2}{2(1-\varrho^2)}}\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varrho\,x^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \varrho\,\mathbf{E}[X^2] = \varrho\operatorname{Var}(X) = \varrho\,,
\end{aligned}$$

denn unter dem zweitletzten Integral steht diesmal der Erwartungswert ϱx derselben Zufallsvariable wie in Teilaufgabe a).