Prof. H.R. Künsch Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Abt. IX, SS99

# Musterlösung zur Übung 9

**1. a)** Damit die Fläche unter dem Dreieck 1 ist muss, $c = \frac{1}{40}$ sein. Der Erwartungswert von $X$ ist natürlich 80 (wer rechnet, ist selber schuld!), und die Varianz findet man via $\mathbf{E}[X^2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \int x^2 f(x)\,dx \int_{40}^{80} x^2\Big(\frac{x}{16000} - \frac{1}{40}\Big)\,dx + \int_{80}^{120} x^2\Big(-\frac{x}{16000} - \frac{3}{40}\Big)\,dx \\
&= \Big(\frac{x^4}{6400} - \frac{x^3}{120}\Big)\Big|_{40}^{80} + \Big(\frac{x^3}{40} - \frac{x^4}{6400}\Big)\Big|_{80}^{120} = 6666\frac{2}{3} \\
\mathrm{Var}(X) &= 6666\frac{2}{3} - 80^2 = 266\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**b)** Laut Aufgabenstellung soll $P[\sum_{i=1}^n X_i \le 9000] \ge 0.99$, wobei alle $X_i$ i.i.d. mit derselben Verteilung wie $X$ sind. Das ist äquivalent zu

$$P\Big[\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\,\mathbf{E}[X]}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \le \frac{9000 - n\,\mathbf{E}[X]}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\Big] = \Phi\Big(\frac{9000 - n\,\mathbf{E}[X]}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\Big) \ge 0.99\,.$$

Der Tabelle der Normalverteilung entnimmt man, dass das für

$$\frac{9000 - n\,\mathbf{E}[X]}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \ge 2.326$$

der Fall ist. Diese Ungleichung ist erfüllt für $n \le 107$.

**2.** Es bezeichnen $F_n^U(t)$ und $F_n^V(t)$ die Verteilungsfunktionen von $U_n$ und von $V_n$.

**a)** Es gelten $F_n^V(t) = P[V(t) \le t] = P[X_i \le t\ \forall i] = \prod_i P[X_i \le t] = F(t)^n$ und $F_n^U(t) = 1 - P[U(t) \ge t] = 1 - P[X_i \ge t\ \forall i] = 1 - (1 - F(t))^n$.

**b)** Für $X_i \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ gilt $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. Also $F_n^U(t) = 1 - (1 - (1 - e^{-\alpha t}))^n = 1 - e^{-n\alpha t}$. Folglich hat $U_n$ eine Exponentialverteilung mit Parameter $n\alpha$.

**c)** Nun ist $F(t) = t$, und damit $P[n(1 - V_n) \le t] = 1 - P[V_n \le 1 - \frac{t}{n}] = 1 - F_n^V(1 - \frac{t}{n}) = 1 - F(1 - \frac{t}{n})^n = 1 - (1 - \frac{t}{n})^n \to 1 - e^{-t}$ $(n \to \infty)$. Die Verteilung von $n(1 - V_n)$ konvergiert schwach gegen eine Exponentialverteilung mit Parameter 1.

**3. a)** Wenn $\int f\,d\mu_n(x) \to \int f\,d\mu(x)$ $(n \to \infty)$ für alle stetigen, beschränkten $f$, dann gilt dies insbesondere für alle $f(x) = e^{itx}$.



**b)** Mit der Aufgabe 1 der Serie 7 und einer Taylorentwicklung rechnet man

$$\begin{aligned}
\phi_{S_n^*}(t) &= \phi_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \phi_{\sum_{i=1}^n X_i}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\Big) = \phi_{X_i}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\Big)^n \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_{X_i}^{(k)}(0)}{k!}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\Big)^k\Big)^n = \Big(1 + 0 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n\sigma^2} + o(n^{-1})\Big)^n \\
&= \Big(1 - \frac{t^2}{2n} + o(n^{-1})\Big)^n \to e^{-\frac{1}{2}t^2}\ (n \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen liefert schliesslich noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\,dx}_{=1} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2}\,.$$

**c)** Jedes $g \in \mathcal{G}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Fubini. Damit gilt mit $n \to \infty$ für jedes $g \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,d\mu_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)e^{itx}\,dt\,d\mu_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)e^{itx}\,d\mu_n(x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\mu_n(x)}_{=\phi_{\mu_n}(t)\to\phi_\mu(t)}\,dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)\phi_\mu(t)\,dt
\end{aligned}$$

Das Rückwärtsrechnen dieser Gleichungskette (mit $\mu$ anstelle von $\mu_n$) liefert jetzt die Behauptung.

**d)** Für die Gegenrichtung von Teilaufgabe a) wählen wir ein festes, stetiges und beschränktes $f$. Die Strategie des Beweises besteht darin, $f$ wie im Beweis von Lemma 3.1 durch geeignete Funktionen $g \in \mathcal{G}$ zu approximieren, für welche die Konvergenz ihrer Erwartungswerte nach Teilaufgabe c) ja gewährleistet ist.
Seien nun $[-c, c]$ ein kompaktes Intervall und $g$ eine $C^\infty$-Funktion mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le c - 1) \\ \in [0,1] & (c - 1 \le |x| \le c) \\ 0 & (|x| \ge c) \end{cases}\,.$$

Damit gilt $\mu_n([-c, c]) \ge \int g(x)\,d\mu_n(x) \to \int g(x)\,d\mu(x) \ge \mu([-c+1, c-1])$ wegen Teil c). Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann man also ein $c$ finden, sodass $\mu_n([-c, c]) > 1 - \varepsilon$ für alle $n$ (und natürlich auch $\mu([-c, c]) > 1 - \varepsilon$). Andererseits existiert gemäss dem Satz von Weierstrass zu jedem $\varepsilon > 0$ und für jedes $c$ – also insbesondere für das obige – ein $g \in \mathcal{G}$ (zum Beispiel ein Polynom) mit $|f(x) - g_(x)| \le \varepsilon$ auf $[-c, c]$. Zusammengefasst: $\forall \varepsilon > 0\ \exists c$ (obiges!) $\exists g$ (obiges!) mit

$$\sup_n \Big|\int (f - g)\,d\mu_n\Big| \le \underbrace{\sup_{|x|\le c} |f - g|}_{\le\varepsilon} + 2\underbrace{\sup_x |f|}_{=\text{const}} \cdot \underbrace{|\sup_n(1 - \mu_n([-c, c]))|}_{<\varepsilon}\,.$$

(Die gleiche Abschätzung gilt natürlich auch mit $\mu$ statt $\mu_n$.) Schliesslich geht's nun noch ans Eingemachte:

$$\Big|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\mu\Big| \le \Big|\int (f - g)\,d\mu_n\Big| + \Big|\int g\,d\mu_n - \int g\,d\mu\Big| + \Big|\int (g - f)\,d\mu\Big|$$

Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ wählt man $g \in \mathcal{G}$, sodass der erste und der dritte Term rechts je $\le \frac{\varepsilon}{3}$ sind für alle $n$. Dann existiert wegen Teilaufgabe c) weiter ein $n_0$, sodass der mittlere Term $\le \frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle $n \ge n_0$.