Serie 1

1. Mit einem Würfel wird N Mal gewürfelt.
A_k sei das Ereignis : Beim k-ten Mal wird eine 3 gewürfelt.
B_k sei das Ereignis : Beim k-ten Mal wird eine 6 gewürfelt.

a) Definiere ein geeignetes Laplace-Modell und berechne $P[A_k]$ und $P[B_k]$.

b) Drücke folgende Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse A_k, B_k (k=1,2,...,N), aus:
A : 6 wird nie gewürfelt;
B : mindestens einmal wird 3 gewürfelt;
C : mindestens einmal wird 6 und mindestens zweimal wird 3 gewürfelt.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C.

d) Beschreibe mit Worten die Ereignisse:
1) $[\bigcup_{i=1}^{N}(A_i)^c]^c$;
2) $\bigcup_{i=1}^{N-2}(A_i \cap A_{i+1} \cap B_{i+2})$;
3) $\bigcap_{i=1}^{N-1}(A_i \cup B_{i+1})$.

2. Zeige, dass für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

a) $1_{[A_1 \cup \cdots \cup A_n]} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i})$ und leite daraus folgende Formel her:

$$P\left[A_1 \cup \cdots \cup A_n\right] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P\left[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right].$$

b) Beweise mit Induktion, dass

$$P\left[A_1 \cup \cdots \cup A_n\right] \le \sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right] - \sum_{i=1}^{n-1} P\left[A_i \cap A_{i+1}\right],$$
$$P\left[A_1 \cup \cdots \cup A_n\right] \ge \sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right] - \sum_{i \ne j} P\left[A_i \cap A_j\right].$$

3. **a)** Sei Ω endlich. P und Q seien zwei Wahrscheinlichkeiten auf Ω. Wir definieren den totalen Variationsabstand

$$d_{TV}(P,Q) = \sup_{A \subseteq \Omega} |P(A) - Q(A)|.$$

Zeige

$$d_{TV}(P,Q) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) - q(\omega))^+ = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |p(\omega) - q(\omega)|.$$

b) Sei Ω der Grundraum für die Zufallswahl von n Elementen aus $\{1, \ldots, N\}$ und P bzw. Q die Wahrscheinlichkeiten, die dem Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen entsprechen. Berechne $d_{TV}(P,Q)$.

Bitte wenden!

4. Sei $G = (V, K)$ ein beliebiger endlicher, ungerichteter Graph ohne Schleifen mit Ecken V und Kanten K. Das MAX-CUT-Problem (maximaler Schnitt) besteht darin, eine Teilmenge A von V ($A \subseteq V$) so zu bestimmen, dass die Menge $K_A \subseteq K$ der Kanten, welche einen Punkt aus A mit einem Punkt aus $A^c = V \setminus A$ verbinden, möglichst gross ist. Dies ist ein schwieriges Problem der kombinatorischen Optimierung. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass es immer ein $A \subseteq V$ gibt so, dass $|K_A| \geq \frac{1}{2}|K|$.

Beispiel:

a) Wir wählen A zufällig, d.h. jede mögliche Teilmenge von V hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Berechne die Wahrscheinlichkeit $P[e \in K_A]$ für ein festes $e \in K$.

b) Schliesse aus **a)** und der Linearität des Erwartungswertes $E[|K_A|] = \frac{1}{2}|K|$.

Hinweis: Schreibe K_A als Summe von Indikatorfunktionen.

c) Schliesse aus **b)**, dass es ein A geben muss mit $|K_A| \geq \frac{1}{2}|K|$.

5. **a)** Welche der folgenden vier 0-1-Folgen der Länge 30 wurden durch das Werfen einer fairen Münze erzeugt?

0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1
0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1
0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0

b) Fairer Münzwurf bedeutet Gleichverteilung auf der Menge $\{0, 1\}^{30}$. Inwiefern ist die unter **a)** gegebene Antwort dennoch sinnvoll?

Abgabe: Freitag, 9. April 1999.
Präsenz: Mo-Do, 12.00-13.00 Uhr, im HG G32.6.