Übung 10

1. $X_1, X_2, \ldots$ seien i.i.d. mit Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & (x \geq 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases},$$

wobei $\theta \in (1, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist.

a) Berechne den Maximum Likelihood Schätzer T_n für θ, basierend auf n Beobachtungen.

b) Zeige, dass (T_n) konsistent ist.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Verteilen eines Jasskartenspiels (bestehend aus 4 Farben, jeweils von der Sechs bis zum As,) auf vier Spielerinnen eine Spielerin alle vier Bauern erhält, ist genähert $\frac{1}{120}$. An einem Jassabend werden die Karten 60mal ausgeteilt.

a) Sei X die Anzahl Austeilungen, bei denen eine Spielerin alle vier Bauern erhält. Welche Verteilung hat X? Durch welche andere Verteilung kann man diese sehr gut annähern? Berechne $P[X = 0]$ exakt und mit dieser Näherung.

b) Der tatsächlich beobachtete Wert an diesem Abend ist $x = 3$. Berechne $P[X = 3]$ und $P[X \geq 3]$ mit der Näherung. Kann man das Ereignis noch als „reinen Zufall" betrachten, oder ist da etwas nicht mit rechten Dingen zugegangen?

3. Zufällig aus einer Population auszuwählende Individuen haben unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit p eine interessierende Eigenschaft „Erfolg". Wir schätzen den Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ mit zwei verschiedenen Experimenten:

A : n Individuen, X = Anzahl Erfolge,
B : n Gruppen mit jeweils c Individuen,
X = Anzahl Gruppen mit mindestens 1 Erfolg.

Die zweite Versuchsanordnung ist naheliegend, wenn es leicht ist, Individuen für einen Test zu finden, der Test selber aber aufwendig ist (Bsp.: Schätzung des Anteils an Insekten, die einen bestimmten Krankheitserreger auf sich tragen).

a) Bestimme die Verteilung von X bei Experiment A und B.

b) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für p in den beiden Experimenten.

c) Sind die Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu in Experiment A und B?

d) Berechne $E[|T - p|^2]$ für $p = 0.2,\ n = 5,\ c = 2$ in beiden Fällen und kommentiere das Ergebnis.

4. Berechne den Bruchpunkt (für $n \to \infty$) für

a) die beiden Skalenschätzer

$$\begin{aligned} \text{Medianabweichung} &:= \text{MAD}((X_i)_{i=1,\ldots,n}) \\ &:= \text{median}((|X_i - \text{median}((X_j)_{j=1,\ldots,n})|)_{i=1,\ldots,n}) \\ \text{Quartilsdifferenz} &:= X_{(3n/4)} - X_{(n/4)} \end{aligned}$$

b) die beiden Lokationsschätzer

$$\begin{aligned} \text{Hodges-Lehmann-Schätzer} &:= \text{median}\Big(\Big(\frac{X_i + X_j}{2}\Big)_{i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,n}\Big) \\ \text{Siegels Repeated Median} &:= \text{median}\Big(\Big(\text{median}\Big(\Big(\frac{X_i + X_j}{2}\Big)_{i=1,\ldots,n}\Big)\Big)_{j=1,\ldots,n}\Big) \end{aligned}$$

Präsenz: Montag bis Donnerstag, 12.00–13.00 Uhr im HG G32.6

Abgabe: Freitag, 18. Juni 1999 in der Vorlesung