Serie 2

1. Das Ballot-Problem. Bei einem Wahlgang mit total n Stimmen erhält der Sieger von zwei Kandidaten k Stimmen mehr als sein Gegner. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sieger während der ganzen Auszählung in Führung liegt, wenn die Stimmen in zufälliger Reihenfolge ausgezählt werden?

Hinweis: Betrachte dazu die Irrfahrt $(S_n)_{n\geq 0}$, und zeige, dass es gleich viele Trajektorien von $(0,1)$ nach (n,k) gibt, welche die t-Achse schneiden oder berühren, wie Pfade von $(0,1)$ nach $(n,-k)$ $(k>0)$.

2. Urnenmodell ohne Zurücklegen. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum Ω_2 vom Skript mit der Gleichverteilung. Sei $X_j(\omega) = 1_{[\omega_j \leq K]}$ (d.h. 1, falls die j-te Kugel rot).

a) Berechne $P\left[X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\right]$ und $P\left[X_1(\omega) = 1\right]$.

b) Bestimme $P\left[X_j(\omega) = 1\right]$ für beliebiges j ohne explizite Rechnung.

c) Berechne den Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung.

3. Wir betrachten das folgende Modell für die Anzahl Anrufe in zwei nicht überlappenden Perioden:

$$\Omega := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \ , \ \mathfrak{A} := \mathcal{P}(\Omega) = \{A | A \subseteq \Omega\}$$

Das Wahrscheinlichkeitsmass P auf Ω ist durch die Gewichtsfunktion

$$p : \Omega \longrightarrow [0,1] \ , \ \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto p(\omega) := e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{\omega_1}}{\omega_1!} \cdot e^{-\mu} \ \frac{\mu^{\omega_2}}{\omega_2!}$$

definiert. Sei Z die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \ , \ \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto Z(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \ .$$

a) Zeichne das Ereignis $A_k := \{Z = k\}$.

b) Beweise die Identität

$$P[Z = k] = e^{-(\lambda+\mu)} \ \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \ .$$

Abgabe: Freitag, 16. April 1999.
Präsenz: Mo-Do, 12.00-13.00 Uhr, im HG G32.6.