Serie 3

1. Das Ruinproblem. Arno und Benno spielen folgendes Spiel: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Erscheint Kopf, so zahlt Benno einen Franken an Arno, und umgekehrt bei Zahl. Arnos bzw. Bennos Vermögen vor der ersten Runde beläuft sich auf a bzw. b Franken ($a, b \in \mathbb{N}$). Das Spiel geht zu Ende, wenn einer der beiden kein Geld mehr hat, spätestens aber nach n Runden. p_n bzw. q_n bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass Arno bzw. Benno nach diesem Spiel ruiniert ist.

a) Zeige: $\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = 1$.

b) Berechne den Grenzwert $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.
Hinweis: Betrachte Arnos erwarteten Gewinn nach n Runden.

c) Wir machen die Abhängigkeit von p_n, q_n, p und q nun explizit und schreiben z. B. $p_n(a, b)$. Zeige, dass

$$p_n(a,b) = \frac{1}{2}p_{n-1}(a+1, b-1) + \frac{1}{2}p_{n-1}(a-1, b+1)$$

und

$$p(a,b) = \frac{1}{2}p(a+1, b-1) + \frac{1}{2}p(a-1, b+1).$$

d) Bestimme aus **c)** $p(a, b)$.
Hinweis: Fixiere $m = a + b$ und betrachte die Gleichung für $p(a, m - a)$.

2. Mehrdimensionale symmetrische Irrfahrt. Seien für $d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Omega &= (\underbrace{\{-1,+1\} \times \ldots \times \{-1,+1\}}_{d-\text{mal}})^N = \{(\omega_{i,j})_{1\le i\le d, 1\le j\le N} \,:\, \omega_{ij} = \pm 1\}, \\
\mathcal{A} &= \{A \,:\, A \subseteq \Omega\}, \\
P &= \text{die Gleichverteilung auf } \Omega, \\
S_n &= (S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(d)}),\ S_0 = (0, \ldots, 0),
\end{aligned}$$

wobei

$$S_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} \quad (1 \le i \le d).$$

Ferner sei R_n die Anzahl Besuche in $(0, \ldots, 0)$ bis zur Zeit n.

a) Interpretiere $(S_0, \ldots, S_N)$ als Pfad einer Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$. Zeichne insbesondere den Pfad, der zu $d = 2$, $N = 5$ und
$\omega = ((1,1),\ (1,-1),\ (-1,-1),\ (1,1),\ (-1,1))$ gehört.

b) Bestimme das asymptotische Verhalten von $P[S_{2n} = (0, \ldots, 0)]$ und $E[R_n]$ für $d = 2$ und 3.
Diskutiere das Ergebnis, vor allem im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeit, dass die Irrfahrt einmal nach $(0, \ldots, 0)$ zurückkehrt.

Bitte wenden!

3. **a)** Münzwurf mit zufälligem Erfolgsparameter p. Sei p gleichverteilt auf $\{(2j-1)/(2h);\ 1 \le j \le h\}$. Gegeben $p = (2j-1)/(2h)$, bezeichne mit $(X_1, \ldots, X_n)$ die Ergebnisse beim n-maligen Werfen einer Münze mit Erfolgsparameter p. Berechne

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \ .$$

Was erhält man für $h \to \infty$?

Hinweis: $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \left(\frac{\Gamma(\alpha+1+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\right)^{-1}$.

b) Berechne

$$P\left[p = \frac{2j-1}{2h} \,\middle|\, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right],$$

sowie den Grenzwert

$$P\left[p = \frac{2j-1}{2h} \,\middle|\, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right] \cdot h$$

für $h \to \infty$, $j \to \infty$, $\frac{j}{h} \to p_1 \in [0,1]$.

c) Modellierung eines Lernverhaltens. Zu Beginn befinden sich in einer Urne eine weisse und eine rote Kugel. Jede gezogene Kugel wird zurück in die Urne gelegt und eine Kugel gleicher Farbe zusätzlich hineingelegt. Berechne

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$$

wobei $X_i = 1_{[i\text{-te gezogene Kugel rot}]}$. Vergleiche mit dem Ergebnis von **a)**.

Abgabe: Freitag, 23. April 1999.
Präsenz: Mo-Do, 12.00-13.00 Uhr, im HG G32.6.