Serie 5

1. Totaler Variationsabstand zwischen Binomial- und Poissonverteilung.

a) Sei $\Omega = \{-1, 0, 1, \dots\}$ und

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega \leq 0 \\ \omega & \text{falls } \omega > 0 \end{cases}$$

Definiere Gewichte $p_1(\omega)$ so, dass X Binomial$(1,p)$- und Y Poisson(p)-verteilt sind. Berechne $P[X \neq Y]$.

b) Sei $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \, \omega_i \in \{-1, 0, 1, \dots\}\}$, $p_n(\omega) = p_1(\omega_1) \cdots p_1(\omega_n)$ und $X_i(\omega) = X(\omega_i)$, $Y_i(\omega) = Y(\omega_i)$, $U = \sum_{i=1}^n X_i$, $V = \sum_{i=1}^n Y_i$. Welche Verteilungen besitzen U und V? Schätze $P_n[V \neq U]$ möglichst einfach ab.

c) Zeige, dass $P_n[V \neq U]$ eine obere Schranke für den totalen Variationsabstand zwischen der Poisson(np)- und der Binomial(n,p)-Verteilung ist.

Hinweis: Benutze dass für beliebiges $A \subset \Omega$ gilt: $P_n[V \in A] = P_n[V \in A, V = U] + P_n[V \in A, V \neq U]$.

2. Warteschlangen. Wir betrachten das folgende Modell einer Warteschlange in diskreter Zeit $t = 0, 1, 2, \dots$. In jedem Zeitschritt wird der vorderste Kunde mit Wahrscheinlichkeit 1/2 fertig bedient und verlässt das System. Unabhängig davon kommt ein neuer Kunde mit Wahrscheinlichkeit 1/4 an, der sich hinten in die Schlange stellt. Die Vorgeschichte spielt dabei keine Rolle. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich ein Kunde im System. Wir bezeichnen mit X_t die Anzahl Kunden im System zum Zeitpunkt t.

a) Formalisiere die durch den obigen Text an die Zufallsvariablen X_t gestellten Bedingungen, d.h. gib *formal* an, welche Eigenschaften die X_t und das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmass P erfüllen sollen.

b) Gegeben sei ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, auf dem eine Folge unabhängiger 0-1-wertiger Zufallsvariablen Z_i mit $P[Z_i = 0] = \frac{1}{2}$ definiert sei. (Nach Beispiel 2.4 im Skript wäre $\Omega = [0, 1[$, versehen mit der Borel-σ-Algebra und dem Lebesguemass ein solcher Raum.) Konstruiere aus den Z_i Zufallsvariablen X_t auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den in a) angegebenen Eigenschaften.

c) Zeige, dass die in b) konstruierten X_t die in a) angegebenen Bedingungen wirklich erfüllen.

3. **a)** Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine (beliebige) Klasse von σ-Algebren auf einem Raum Ω. Zeige, dass $\mathcal{B} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist.

Bitte wenden!

b) Konstruiere zwei σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf einem Raum Ω so, dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ keine σ-Algebra ist.

c) Konstruiere ein Beispiel mit $\sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] = \infty$, aber wo $P\left[\cap_n \cup_{k \geq n} A_k\right] = 0$.

Abgabe: Freitag, 7. Mai 1999.
Präsenz: Mo-Do, 12.00-13.00 Uhr, im HG G32.6.