Serie 6

1. Bei positiven Zufallsgrössen ist die Annahme der Normalverteilung oft nicht sinnvoll. Hingegen zeigt es sich in vielen Anwendungen, dass $\log Y$ (Logarithmus zur Basis e) genähert normalverteilt ist.

a) Berechne die kumulative Verteilungsfunktion und die Dichte der Zufallsvariablen $Y = \exp(X)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. (Das heisst dann $\log Y = X$ ist normalverteilt.)

b) Berechne $P[Y > 100]$ und das 5%-Quantil von Y, wenn $\log Y \sim \mathcal{N}(4.0, 0.5)$.

2. Bluttest-Problem (Dieses Problem wurde in der US-Armee während dem 2.Weltkrieg untersucht). N Leute haben sich einem Bluttest zu unterziehen. Dies kann nun auf zwei Arten durchgeführt werden.
(i) Jede Person wird separat getestet.
(ii) Die Blutproben von k Individuen werden zusammengelegt und die "gepoolte" Probe wird getestet. Falls das Resultat negativ ausfällt, so genügt dieser eine Test, andernfalls muss jede der k Personen noch separat getestet werden.
Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit p, dass der Test positiv ausfällt, dieselbe ist für alle Leute und dass die Individuen stochastisch unabhängig sind.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test für eine zusammengelegte Probe von k Individuen positiv ist?

b) Wie gross ist die erwartete Anzahl Tests bei dem Vorgehen (ii)?

c) Bestimme approximativ dasjenige k, bei dem die erwartete Anzahl Tests bei (ii) minimal ist. (Hinweis: Vernachlässige Terme der Ordnung p^2 und höher).

3. Modellierung von Wartezeiten. Sei T eine nichtnegative Zufallsvariable, deren Dichte auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist. Die sogenannte *Ausfall-* oder *Hasardrate* ist definiert als

$$\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ t \longrightarrow \lambda(t) := \lim_{h \to 0} P[t < T \leq t + h \,|\, T > t]/h.$$

a) Zeige, dass dieser Grenzwert existiert, und drücke λ mit Hilfe von f und F aus. Gib eine Interpretation von $\lambda(t)$, im Fall, wo T die Lebensdauer eines Gerätes darstellt.

b) Zeige, dass die Hasardrate die Verteilungsfunktion bestimmt.

c) Berechne die Verteilungsfunktion, wenn $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ $(\beta > 0)$. Was ergibt sich im Spezialfall $\beta = 1$?

d) Beweise

$$\big(\forall t, s \in \mathbb{R}^+,\ \ P[T > t + s \,|\, T > t] = P[T > s]\big) \quad \Longleftrightarrow \quad T \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$$

(Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung).

Bitte wenden!

4. Die folgenden Zahlen x_i $(i = 1, \dots 20)$ sind Realisierungen einer auf $[0,1]$ uniform verteilten Zufallsvariablen X.
0.254 0.400 0.803 0.667 0.032 0.052 0.578 0.262 0.833 0.982
0.956 0.975 0.230 0.235 0.482 0.399 0.462 0.836 0.175 0.872

a) Konstruiere hieraus eine poissonverteilte Stichprobe mit Parameter $\lambda = 1$.

b) Konstruiere aus obigen x_i eine Folge t_i $(i = 1, \dots, 20)$ von exponentialverteilten Zufallszahlen mit Parameter $\lambda = 10$.

c) Q-Q–Plot. Wir wollen nun mit einem graphischen Verfahren überprüfen, wie "gut" die Zufallszahlen t_i einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 10$ genügen. Dazu definieren wir die <u>empirische Verteilungsfunktion</u> F_n $(n = 20)$ via

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{t_i \le x\}} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Für eine Verteilungsfunktion F und $\alpha \in (0,1)$ setze

$$q_\alpha := F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \mid F(x) \ge \alpha\} .$$

Trage nun in einem Diagramm die $t_{(i)}$ aus der geordneten Stichprobe $t_{(1)} \le t_{(2)} \le \dots \dots \le t_{(n)}$ gegen die Quantile $q_{(i-1/2)/n}$ $(i = 1, \dots, n)$ auf für $F(x) = 1 - \exp\{-10 \cdot x\}$ (Q-Q–Plot). Was stellst Du fest?

5. Wir interessieren uns für die maximale Länge von Einer-Blöcken (auch runs genannt) beim Münzwurf. Seien also $X_1, X_2, \dots$ unabhängige binäre Zufallsvariablen mit $P[X_i = 1] = p \in (0,1)$ gemäss Skript 2.1.3. Ferner definieren wir für $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} l_n &= \max\{[\alpha \log n], 1\}, \ k_n = [n/l_n], \\ B_{n,j} &= \{X_i = 1 \ \text{ für alle } i \text{ mit } (j-1)l_n + 1 \le i \le j l_n\}, \\ A_n &= \cup_{j=1}^{k_n} B_{n,j}. \end{aligned}$$

($[x]$ bezeichnet den ganzzahligen Teil von x).

a) Berechne $P[A_n]$.

b) Zeige, dass Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren mit $c_1 \frac{n^{\alpha \log p + 1}}{\log n} \le k_n p^{l_n} \le c_2 \frac{n^{\alpha \log p + 1}}{\log n}$ für alle $n \ge 1$.

c) Beweise, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } \alpha \text{ klein gilt:} \qquad && P\left[\cap_n \cup_{k \ge n} A_k^c\right] = 0, \\ &\text{für } \alpha \text{ gross gilt:} \qquad && P\left[\cap_n \cup_{k \ge n} A_k\right] = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwende $e^{-2x} \le 1 - x \le e^{-x}$ für $x \in (0, 1/2)$.

d) Folge daraus, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{L_n}{\log n} \le \limsup_{n \to \infty} \frac{L_n}{\log n} < \infty,$$

wenn $L_n =$ die Länge des grössten Einer-Blocks in $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ist.

Abgabe: Freitag, 21. Mai 1999.
Präsenz: Mo-Do, 12.00-13.00 Uhr, im HG G32.6.