Übung 7

1. Wir definieren die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X als

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}[e^{itX}] = \int e^{itx}\, d\mu(x)\,.$$

a) Zeige $\phi_X(0) = 1$, $|\phi_X(t)| \leq 1$, ϕ_X ist stetig und $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$.

b) Zeige mit Induktion:
Wenn $\mathbf{E}[|X|^k] < \infty$, dann ist ϕ_X k-mal differenzierbar und $\phi_X^{(k)}(t) = i^k\, \mathbf{E}[X^k e^{itX}]$ (insbesondere also $\phi_X^{(k)}(0) = i^k\, \mathbf{E}[X^k]$).
Hinweis: Satz von Lebesgue

c) Zeige: Wenn X und Y unabhängig sind, dann ist $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\, \phi_Y(t)$.

2. **a)** Sei X gleichverteilt auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $Y = \tan X$. Berechne die Dichte von Y (sogenannte Cauchyverteilung). Wie gross ist $\mathbf{E}[Y]$?

b) Man kann mit Hilfe des Residuensatzes zeigen, dass $\phi_Y(t) = e^{-|t|}$. Vergleiche Dein Resultat für $\mathbf{E}[Y]$ mit der Aufgabe 1.b).

c) Berechne mit Hilfe von Aufgabe 1 die Dichte von $\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)$, wobei Y_1 und Y_2 unabhängig cauchyverteilt sind. Du kannst dabei den Umkehrsatz für charakteristische Funktionen benutzen:

$$\phi_{Z_1}(t) = \phi_{Z_2}(t)\; \forall t \implies Z_1 \text{ und } Z_2 \text{ haben die gleiche Verteilung}$$

3. (X, Y) seien zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c\, \exp\Big(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(x^2 + y^2 - 2\varrho xy)\Big)$$

mit $-1 < \varrho < 1$.

a) Berechne die Randdichte von X und daraus c.
Hinweis: Quadratisch ergänzen.

b) Berechne $\mathbf{E}[XY]$ und daraus die Korrelation von X und Y.

Diese Verteilung ist die zweidimensionale Normalverteilung.

Präsenz: Montag bis Donnerstag, 12.00–13.00 Uhr im HG G32.6

Abgabe: Freitag, 28. Mai 1999 in der Vorlesung