Übung 8

1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$. Wir wollen Y mit einer linearen Prognosefunktion $\alpha X + \beta$ voraussagen.

a) Bestimme β so, dass $\mathbf{E}[(Y-\beta)^2]$ minimal wird.
b) Bestimme α und β so, dass $\mathbf{E}[(Y-\alpha X-\beta)^2]$ minimal wird.
c) Berechne das Verhältnis der beiden minimalen quadratischen „Prognosefehler" in a) und b), und interpretiere das Ergebnis.

2. Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbf{E}[|Y|] < \infty$. Wir setzen für $x \in X(\Omega)$

$$m(x) = \mathbf{E}[Y|X=x] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\, P[Y=y|X=x]\,.$$

($m(x)$ ist also die bedingte Erwartung von Y, wenn X den Wert x annnimmt.)
Damit wird $m(X)$ eine neue Zufallsvariable, die wir mit $\mathbf{E}[Y|X]$ bezeichnen. Zeige

a) $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]]$,
b) $\mathbf{E}[Y g(X)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]\, g(X)]$ für jede beschränkte Funktion g auf $\mathbb{R}$,
c) wenn $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$, dann gelten $\mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]^2] < \infty$ und $\mathbf{E}[(Y-\mathbf{E}[Y|X])^2] \le \mathbf{E}[(Y-g(X))^2]$ für alle g mit $\mathbf{E}[g(X)^2] < \infty$, d. h. $\mathbf{E}[Y|X]$ ist die beste Prognose von Y gestützt auf X.

3. Sei (X_i) eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_i] &= \mu\ \forall i\,, \\ \mathrm{Var}(X_i) &= \sigma^2 < \infty\ \forall i \\ \text{und}\ \ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= R(|i-j|) < \infty\ \forall i,j\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Zeige, dass aus $R(k) \to 0$ $(k \to \infty)$ folgt

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \text{ stochastisch } (n \to \infty)\,.$$

b) Zeige, dass unter der Bedingung $\sum_{k=0}^\infty |R(k)| < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

existiert, und gib den Grenzwert an.
Hinweis: Wende den Satz von Lebesgue an.

Präsenz: Montag bis Donnerstag, 12.00–13.00 Uhr im HG G32.6

Abgabe: Freitag, 4. Juni 1999 in der Vorlesung